

# Ch 4 半导体中载流子统计分布

## (II)

- 参考资料:
  1. 半导体物理导论, 刘诺, Ch4
  2. 半导体物理学, 刘恩科, Ch3
  3. 半导体物理基础, 黄昆, Ch2: 2.2, 2.3, 2.4
- ...

# 内容

- 能带中的态密度
- 载流子的热平衡状态
- 热平衡状态下，半导体中载流子的分布概率
- 本征半导体中载流子浓度、费米能级的计算
- 杂质半导体中载流子浓度、费米能级的计算
- 简并半导体
- 非平衡载流子

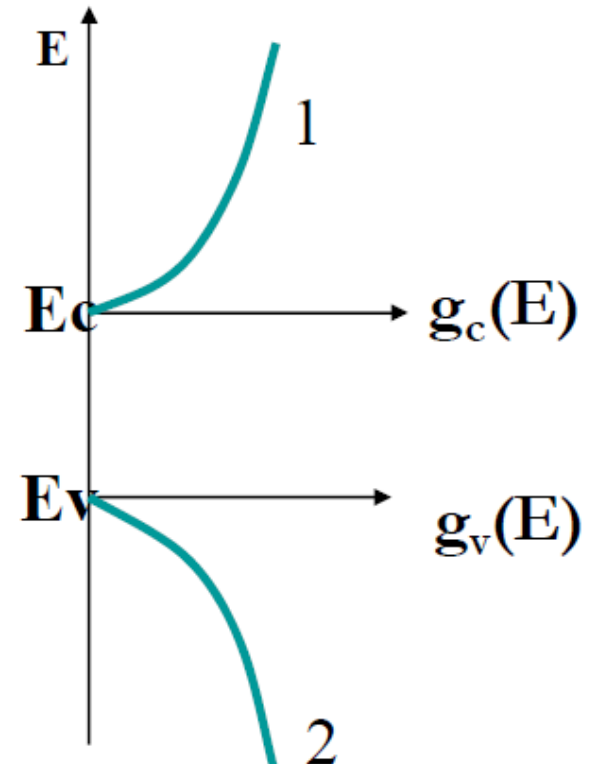
# 上节内容回顾

## 态密度

- 允许电子存在的量子态（能级）是如何按能量大小分布的？
- 每一个确定的能量  $E$  有多少允许电子存在的量子态？

$$g_c(E) = 4\pi V \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} [E(k) - E_c]^{1/2}$$

$$g_v(E) = 4\pi V \left( \frac{2m_{dp}^*}{h^2} \right)^{3/2} [E_v - E(k)]^{1/2}$$



# 上节内容回顾

## ➤分布函数

电子是按什么规律分布在这些能量状态的？

**Fermi**分布函数-电子占据能量 $E$ 的几率

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

空穴占据的几率

$$1 - f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{k_B T}} + 1}$$

电子的**Boltzmann**分布

$$\approx e^{\frac{E_F-E}{k_B T}} = f_B(E)$$

空穴的**Boltzmann**分布

$$\approx e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}$$

电子基本都在导带底部，空穴基本都在价带顶部。

导带中的电子、价带中的空穴，是我们关心的！

# 内容

- 能带中的态密度
- 载流子的热平衡状态
- 热平衡状态下，半导体中载流子的分布概率
- 本征半导体中载流子浓度、费米能级的计算
- 杂质半导体中载流子浓度、费米能级的计算
- 简并半导体
- 非平衡载流子

### 3.4 热平衡时，导带中电子浓度 $n_0$ 和价带中空穴浓度 $p_0$

#### 1. 导带的电子浓度 $n_0$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \approx e^{\frac{E_F-E}{k_B T}} = f_B(E)$$

$$n_0 = \int_{E_C}^{E_{Top}} f(E) g_c(E) dE \approx \int_{E_C}^{\infty} f_B(E) g_c(E) dE$$

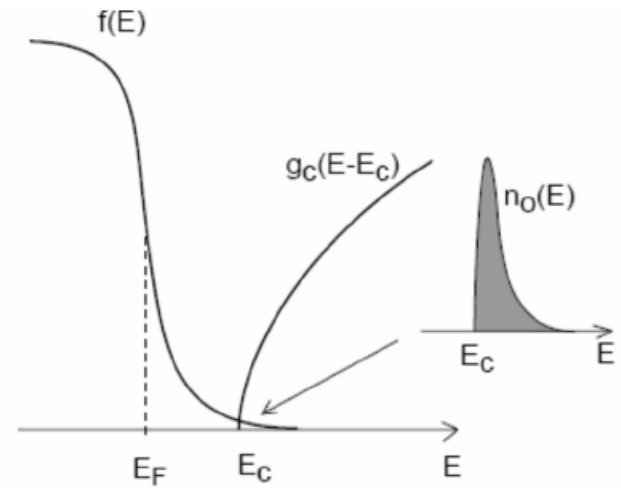
$$= N_c e^{(E_F - E_C)/k_B T} \quad (\text{具体推导过程见：刘诺：84})$$

其中：

$$N_c = 2 \left[ \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right]^{3/2} \text{——导带底的有效状态密度}$$

$$N_c = 2 \left[ \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right]^{3/2}$$

$$= 2.509 \times 10^{19} \left( \frac{m_n^*}{m_0} \right)^{3/2} \left( \frac{T}{300K} \right)^{3/2} \text{ cm}^{-3}$$



$$n_0 = N_c e^{(E_F - E_c)/k_B T} = N_c f_B(E_c)$$

说明：

把导带中所有的量子态都集中在导带低 $E_c$ 处，其态密度为 $N_c$ ，  
导带中的电子浓度是其中有电子占据的量子态数。

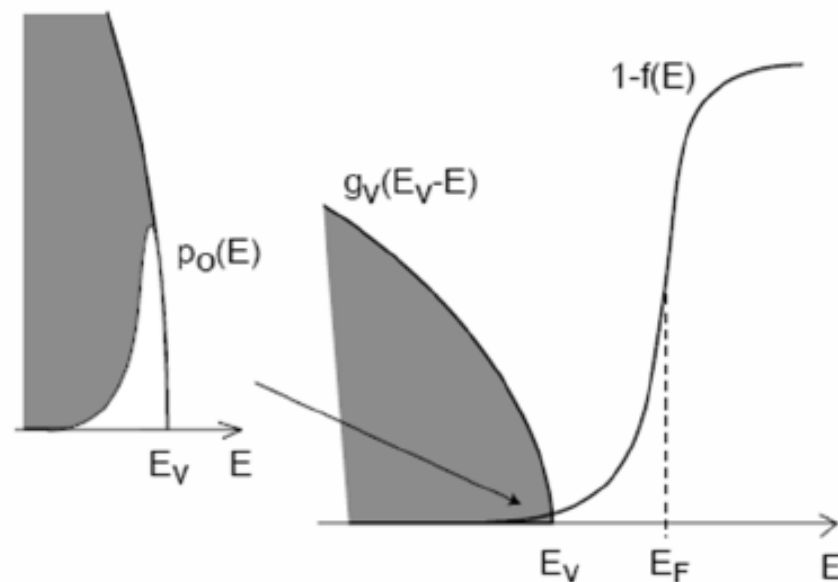
## 2. 价带的空穴浓度 $P_0$

$$\begin{aligned} p_0 &= \int_{E_{Bottom}}^{E_V} g_V(E)[1-f(E)]dE \approx \int_{-\infty}^{E_V} g_V(E)f_B(E)dE \\ &= N_V e^{(E_V-E_F)/k_B T} \end{aligned}$$

其中：

$$N_V = 2 \left[ \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right]^{3/2}$$

— 价带顶的  
有效状态密度





$N_c$ 、 $N_v$ 是有效质量与温度的函数， $T=300\text{K}$ 时的值为：

半导体晶体	$N_c (\text{cm}^{-3})$	$N_v (\text{cm}^{-3})$
Si	$2.8 \times 10^{19}$	$1.04 \times 10^{19}$
Ge	$1.04 \times 10^{19}$	$6.0 \times 10^{18}$
GaAs	$4.4 \times 10^{16}$	$1.09 \times 10^{18}$

Note:

能带的有效态密度仅与电子或空穴的有效质量有关，所以，一定温度下，可以方便求得。

## 例 1

假设费米能级位于导带下0.25eV处， $T=300\text{K}$ 时Si中的 $N_c=2.8\times 10^{19}\text{cm}^{-3}$ ，  
1. 求导带底某个状态被电子占据的概率，并计算 $T=300\text{K}$ 时Si中的热平衡电子浓度。

解：  $E=E_c$ 时，某能态被电子占据的概率为：（导带底的情况）

$$f(E_c) = \frac{1}{e^{\frac{E_c - E_F}{k_B T}} + 1} \approx e^{\frac{E_F - E_c}{k_B T}}$$

占据概率非常低

$$f(E_c) = e^{\frac{-0.25}{0.0259}} = 6.43 \times 10^{-5}$$

得到电子浓度为：

$$\begin{aligned} n_0 &= N_c e^{(E_F - E_c)/k_B T} \\ &= (2.8 \times 10^{19}) e^{\frac{-0.25}{0.0259}} = 1.8 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

注：

因为有大量的能级，尽管电子占据某个能级的概率非常小，导带中还是有大量的电子存在，半导体导带中具有一定的电子浓度（决定材料性能）。

2. 假设费米能级位于价带上0.27eV处,  $T=300K$ 时Si中的 $N_v=1.04 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$ ,  $T=400K$ 时Si中的热平衡空穴浓度。

解:  $T=400K$ 时, 有:

$$N_v = 2 \left[ \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right]^{3/2}$$

$$N_v(400K) = N_v(300K) \left( \frac{T=400K}{T=300K} \right)^{3/2}$$

$$= (1.04 \times 10^{19}) \left( \frac{400K}{300K} \right)^{3/2} = 1.60 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$kT_{400K} = (kT_{300K}) \left( \frac{400K}{300K} \right) = 0.0259 \left( \frac{400K}{300K} \right) = 0.03453 \text{ eV}$$

得到空穴浓度为:

$$\begin{aligned} p_0 &= N_v e^{(E_v - E_F)/k_B T} = (1.60 \times 10^{19}) e^{\frac{-0.27}{0.03453}} \\ &= 6.43 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

## 二、载流子浓度积

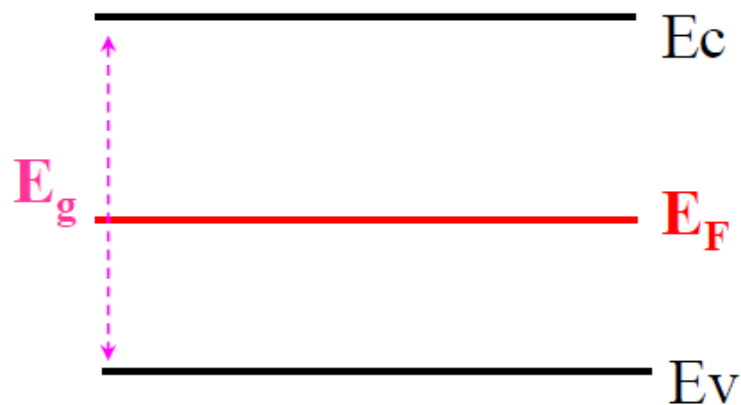
浓度积 $n_0p_0$ 及影响因素

$$\begin{aligned}n_0p_0 &= N_c N_v e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}} \\&= 6.30 \times 10^{38} \left( \frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{300K} \right)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}} \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$

- 当温度 $T$ 一定时，浓度积 $n_0p_0$ 仅仅与本征材料相关；
- 与材料、带隙宽度 $E_g$ 和温度 $T$ 有关：

随 $T \uparrow$ ，浓度积升高；

随 $E_g \uparrow$ ，浓度积下降。

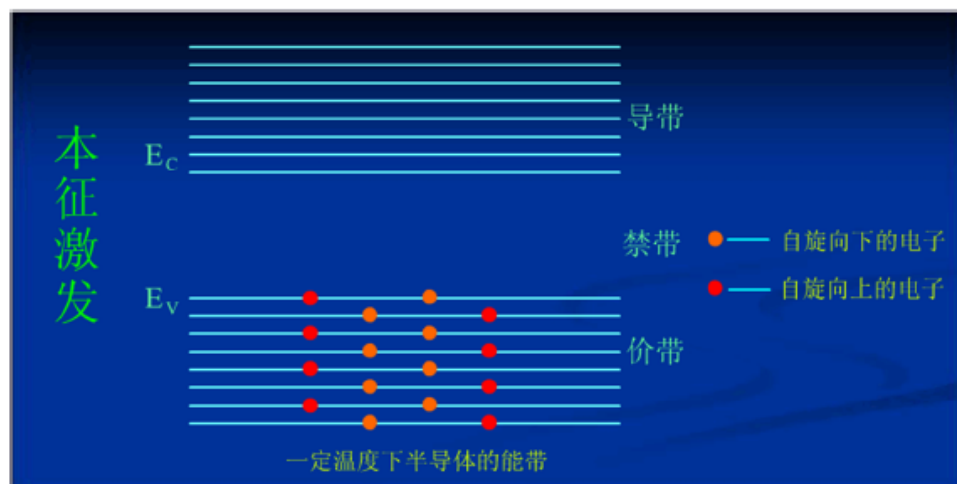
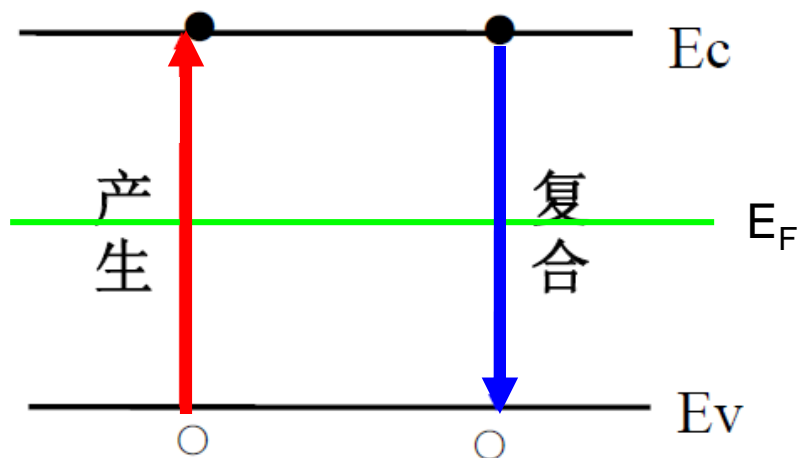


## § 3.5 本征半导体的费米能级和载流子浓度

电子从价带直接向导带激发，成为导带的自由电子，这种激发称为**本征激发**，只有本征激发的半导体称为**本征半导体**。

本征半导体的特征：**电荷中性的基本条件** (Charge neutrality) :

导带中电子浓度  $n_0$  = 价带中空穴浓度  $p_0$

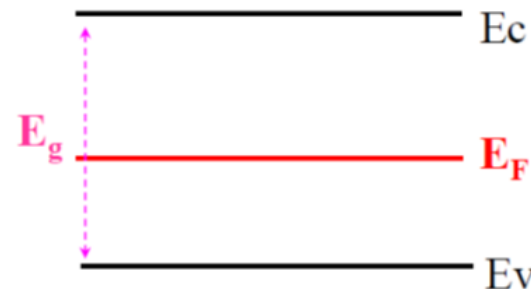


# 一、本征半导体的载流子浓度与本征Fermi能级

$$n_i \equiv n_0 = p_0 = N_c e^{(E_F - E_c)/k_B T} = N_v e^{(E_v - E_F)/k_B T}$$

$n_i$ 为本征半导体的载流子浓度

$$E_F = \frac{1}{2} (E_c + E_v) + \frac{k_0 T}{2} \ln \left( \frac{N_v}{N_c} \right)$$



把 $N_c$ 、 $N_v$ 代入：

$$E_i = E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3k_0 T}{4} \ln \frac{m_p^*}{m_n^*}$$

↓  
本征费米能级：位于禁带中央附近

## 示例

已知Si中载流子有效质量分别为 $m_n^*=1.08m_0$ ， $m_p^*=0.56m_0$ ，计算 $T=300\text{K}$ 时Si中的本征费米能级相对于禁带中央的位置。

解：本征费米能级相对于禁带中央的位置为

$$\begin{aligned} E_{Fi} - E_{midgap} &= \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_n^*} \\ &= \frac{3}{4} (0.0259) \ln \left( \frac{0.56}{1.08} \right) \\ &= -0.0128 \text{ eV} = -12.8 \text{ meV} \end{aligned}$$

**讨论：**300 K时，Si的禁带宽度的一半为560 meV，12.8 meV与之相比可以忽略不计，所以在很多情况下我们可以简单认为本征费米能级就位于禁带中央的位置。

## 二、本征载流子浓度及影响因素

### 1. 本征载流子浓度 $n_i$

$$\because n_o p_o = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

并且:  $n_o = p_o$ , 令  $n_i = n_o = p_o$

$$\therefore n_i^2 = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow n_i = (N_c N_v)^{1/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$= 2 \left( \frac{2\pi k_B T}{h^2} \right)^{3/2} (m_n^* m_p^*)^{3/4} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$= 2.509 \times 10^{19} \left( \frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{3/4} \left( \frac{T}{300K} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \text{ cm}^{-3}$$

$$\propto (m_n^* m_p^*)^{3/4} T^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$



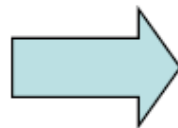
# Mass-action Law

The product of the electron and hole density is

$$np = N_V N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_V}{kT}\right) = N_V N_C \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right)$$

$$n_i = (N_C N_V)^{1/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$n_i$ 是材料和温度的函数，与Fermi能级无关（**适合所有不掺杂与掺杂的情况**）。即：在热平衡的条件下，所有半导体（本征半导体和掺杂半导体）都服从质量作用定律。



$$\therefore n_o p_o = n_i^2$$

质量作用定律

## 例 2

已知 $T=300\text{K}$ 时，砷化镓中 $N_c=4.7\times 10^{17}\text{cm}^{-3}$ ， $N_v=7.0\times 10^{18}\text{cm}^{-3}$ ， $E_g=1.42\text{eV}$ ，分别计算 $T=300\text{K}$ 和 $T=450\text{K}$ 时的本征载流子浓度。

解：  $T=300\text{K}$ 时，有

$$n_i^2 = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = (4.7 \times 10^{17})(7.0 \times 10^{18}) e^{\frac{-1.42}{0.0259}} = 5.09 \times 10^{12}$$
$$n_i = 2.26 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

$T=450\text{K}$ 时，有  $kT_{450\text{K}} = (0.0259) \left( \frac{450}{300} \right) = 0.03885 \text{ eV}$

$$n_i^2 = (4.7 \times 10^{17})(7.0 \times 10^{18}) \left( \frac{450}{300} \right)^3 e^{\frac{-1.42}{0.03885}} = 1.48 \times 10^{21}$$
$$n_i = 3.85 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

温度上升**150度**，本征载流子浓度可以增大**4个数量级**以上

## 2. 影响 $n_i$ 的因素

$$n_i = (N_C N_V)^{1/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$
$$= 2 \left( \frac{2\pi k_B T}{h^2} \right)^{3/2} (m_n^* m_p^*)^{3/4} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

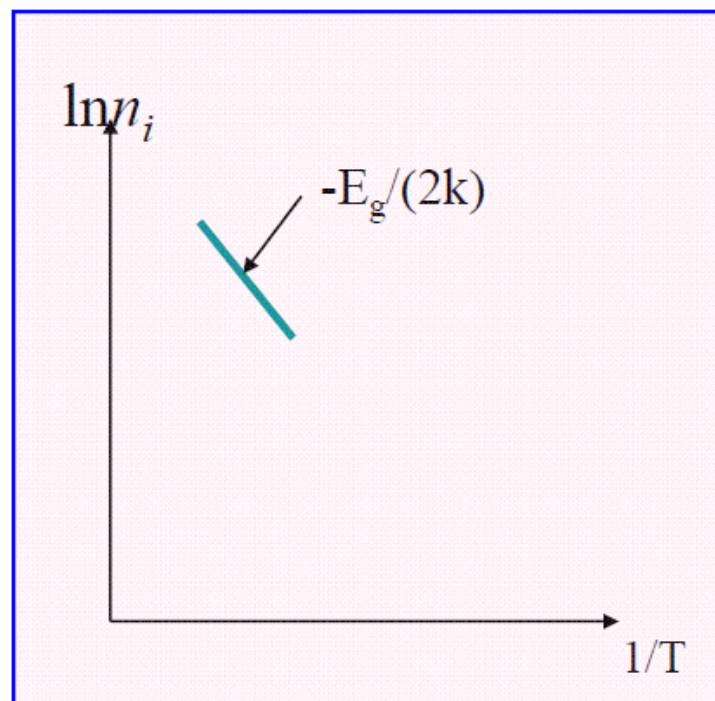
(1)  $m_n^*$ 、 $m_p^*$ 、 $E_g$  ——材料

(2)  $T$  的影响

$$\ln n_i = A + \frac{3}{2} \ln T - \frac{E_g}{2k_B} \frac{1}{T}$$

$T \uparrow$ :  $\ln T \uparrow$ ,  $1/T \downarrow$ ,  $n_i \uparrow$

高温时, 在 $\ln n_i \sim 1/T$ 坐标下, 近似为一直线。



通过斜率可确定材料的禁带宽度 $E_g$

## Accurate measurements of the silicon intrinsic carrier density from 78 to 340 K

Konstantinos Misiakos

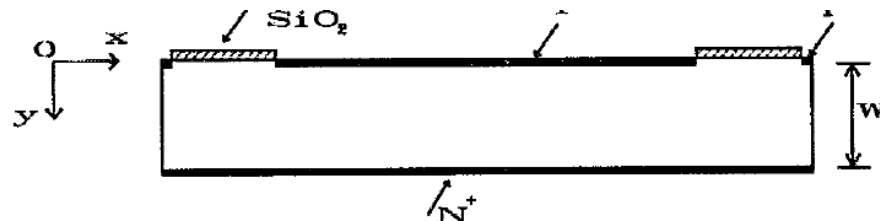
*Microelectronics Institute, NCSR "Demokritos," 15310 Athens, Greece*

Dimitris Tsamakis

*Electrical Engineering Department, National Technical University of Athens, Patision 42, 10682 Athens, Greece*

(Received 1 December 1992; accepted for publication 17 May 1993)

The intrinsic carrier density in silicon has been measured by a novel technique based on low-frequency capacitance measurements of a  $p^+-i-n^+$  diode biased in high injection. The major advantage of the method is its insensitivity to uncertainties regarding the exact values of the carrier mobilities, the recombination parameters, and the doping density. The intrinsic carrier density was measured in the temperature range from 78 to 340 K. At 300 K the value of  $n_i$  was found to be  $(9.7 \pm 0.1) \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ .



$$C_{lf} = \frac{en_i \exp(eV/2kT) V_{ol}}{2kT/e}$$

FIG. 1. Schematic illustration of the  $p-i-n$  diode. The narrow  $P^+$  diffusion is located between the oxide and the vertical-lateral edges of the device.

the intrinsic carrier density value is  $(9.7 \pm 0.1) \times 10^9$


## 在室温 (300K)

	$N_c(\text{cm}^{-3})$	$N_v(\text{cm}^{-3})$	$E_g(\text{eV})$	$n_i(\text{cm}^{-3})$
Si	$2.8 \times 10^{19}$	$1.0 \times 10^{19}$	1.12	$1.5 \times 10^{10}$
Ge	$1.0 \times 10^{19}$	$6.0 \times 10^{18}$	0.66	$2.4 \times 10^{13}$
GaAs	$4.7 \times 10^{17}$	$7.0 \times 10^{18}$	1.42	$1.1 \times 10^7$

**讨论：**实际半导体中总是存在杂质的，在一定温度下要想使载流子主要来源于本征激发，这就要求杂质含量不能超过一定的限度。**例：**Si室温的本征载流子浓度为 $1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ，Si的体密度为 $5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ，这就要求杂质浓度不能超过 $10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ，即材料纯度要达到**12个9**以上才算是本征半导体。

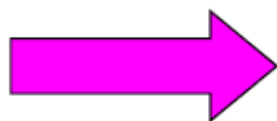
导带中的电子浓度和价带中的空穴浓度也可以表示为本征载流子浓度和本征Fermi能级的形式：

$$\begin{aligned} \therefore n_0 &= N_c e^{(E_F - E_c)/k_B T} \\ \therefore N_c &= n_i e^{-(E_i - E_c)/k_B T} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad n_i = N_c e^{(E_i - E_c)/k_B T}$$



$$\therefore n_0 = N_c e^{(E_F - E_c)/k_B T} = n_i e^{(E_F - E_i)/k_B T}$$

同理：  $p_0 = N_v e^{(E_v - E_F)/k_B T} = n_i e^{(E_i - E_F)/k_B T}$



$$\begin{aligned} n &= n_i e^{(E_F - E_i)/k_B T} \\ p &= n_i e^{(E_i - E_F)/k_B T} \end{aligned}$$

课本，P85：实际意义？

## 说明:

1. 即使纯度为11个9 ( $10^{12}/10^{23}$ )的Si, 在室温下, 也是依赖掺杂工作的 (微量掺杂对半导体性能起决定作用)。
2. 掺杂半导体有一定的工作温度极限 (下一步部分内容)。

## Key conclusions

- *Non-degenerate* semiconductor:  $n_o \ll N_c$  and  $p_o \ll N_v$ : Maxwell-Boltzmann statistics apply:

$$n_o = N_c \exp \frac{E_F - E_c}{kT}, \quad p_o = N_v \exp \frac{E_v - E_F}{kT}$$

- *Intrinsic semiconductor*: ideally pure semiconductor. Under M-B statistics:

$$n_o = p_o = n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp -\frac{E_g}{2kT}$$

- In non-degenerate semiconductor  $n_o p_o$  is a constant that only depends on  $T$ :

$$n_o p_o = n_i^2$$

- In intrinsic semiconductor,  $E_F$  is close to middle of  $E_g$ .